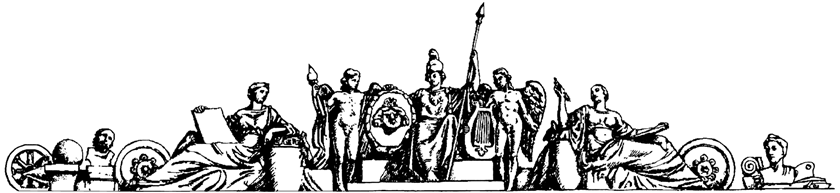
****

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Кафедра «Космические аппараты и ракеты-носители»

Дисциплина «Основы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №1

**Вариант №4**

Студентка: Гусева Н. А.

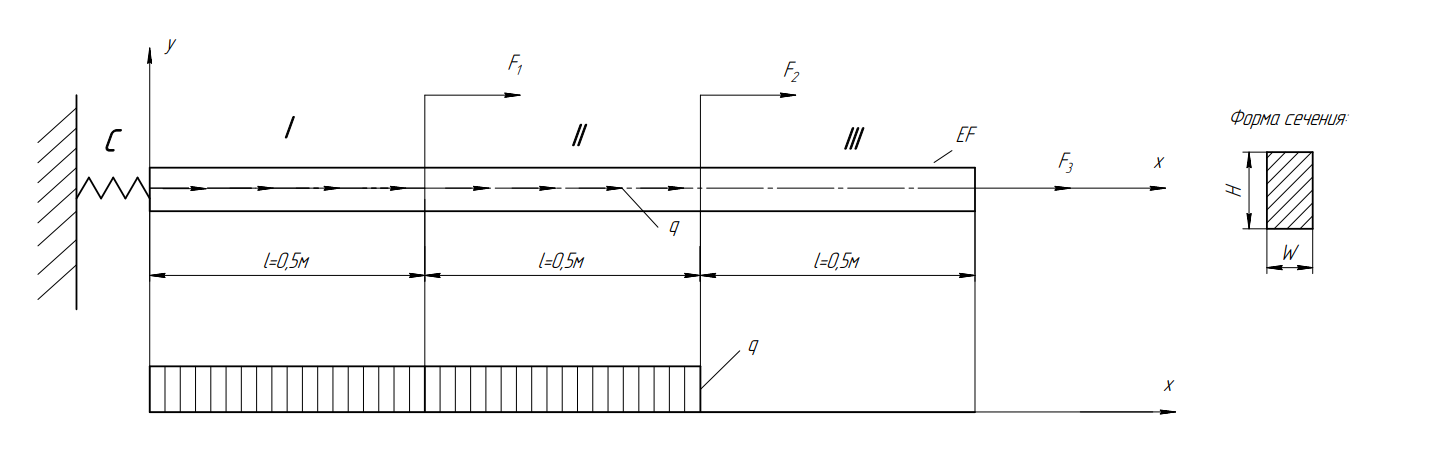
Группа: СМ1-81

Преподаватель: Сдобников А.Н.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |

Москва, 2023 год.

Рабочая схема и распределение нагрузки



Исходные данные:

Материал: сталь

Для данной рабочей схемы необходимо:

Часть 1.

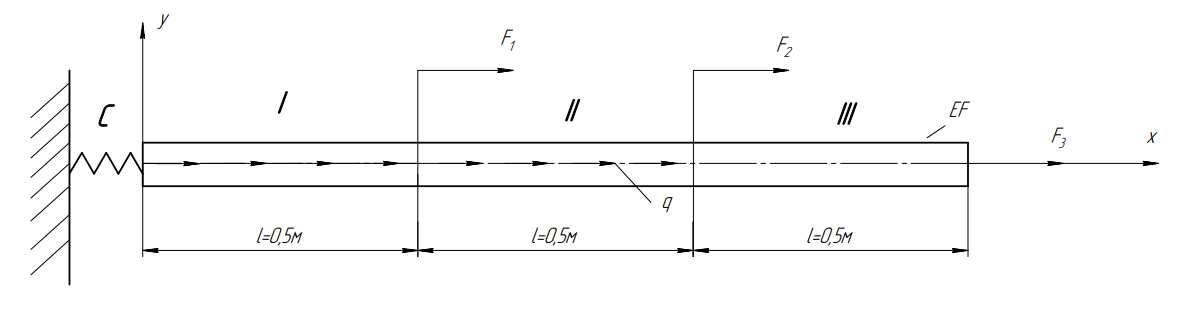
1. Сформулировать краевую задачу
2. Построить точное решение краевой задачи
3. Преобразовать краевую задачу в вариационный принцип
4. Получить решение энергетическим методом на линейной аппроксимации поля перемещений
5. Дать оценку погрешности по энергии между точным и приближенным решением

Часть 2.

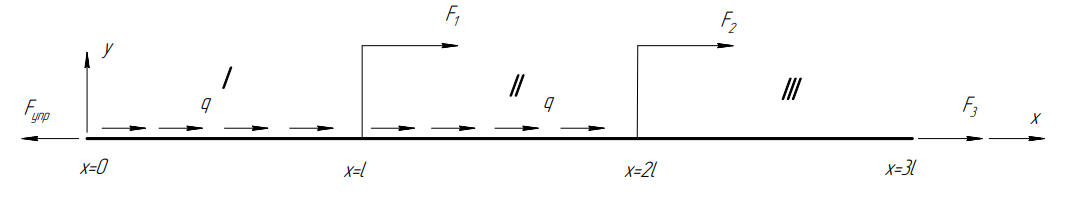
1. Записать разрешающую систему уравнений Методом Конечных Элементов (МКЭ),  
   провести ее анализ и получить «вручную» решение для перемещений и напряжений
2. Выполнить расчет конструкции заданной с использованием MSC Patran\_Nastran
3. Провести сравнительный анализ результатов, полученных методами, использованными в работе
4. Подготовить отчет по результатам проведенных исследований.

**Решение.**

Ведем систему координат:

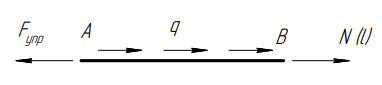


Запишем ДУ равновесия участков и условия на их границах:



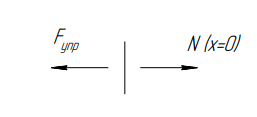
Введем обозначения

**Рассмотрим участок I:**



Дифференциальное уравнение равновесия:

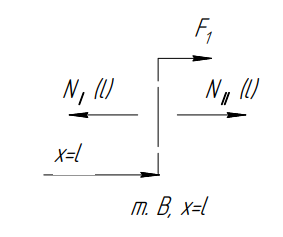
(1)

Условия на границах участка:

x=0, т. А

Условие равновесия:

(А)

В т. В,

Условие равновесия: (Б)

Так как

То уравнение (Б) будет иметь вид:

Замечание:

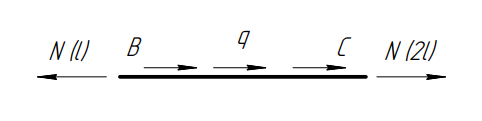
Таким образом, окончательно:

(1a)

При (1б)

При (1в)

**Рассмотрим участок II:**

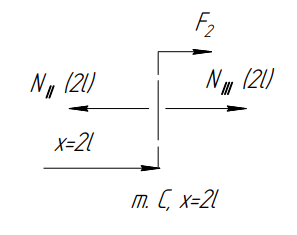


Дифференциальное уравнение равновесия:

В т. В,

Условия стыковки по перемещениям II участка в т. В соответствуют условиям стыковки I участка в этой точке, то есть системе уравнений (1б):

(1б)



В т. С, при :

Условия равновесия: (В)

Так как

То уравнение (В) будет иметь вид:

Замечание:

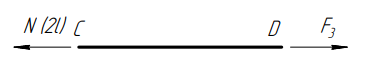
Таким образом, окончательно:

(2a)

При (2б)

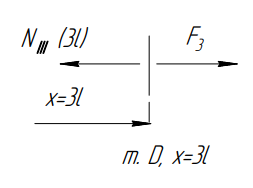
При (2в)

**Рассмотрим участок III:**



ДУ равновесия:

Условия стыковки по перемещениям III участка в т. C при соответствуют условиям стыковки II участка в этой точке, то есть системе уравнений (2б):



В т. D, при :

Условия равновесия:

, следовательно:

Таким образом, в результате приведенных рассуждений можно записать математическую формулировку краевой задачи для рассмотрения схемы:

(3)

Граничные условия и условия стыковки:

*-* граничное условие в точке A (3.1)

- условие стыковки по перемещениям (3.2)

- условие стыковки по усилиям (3.3)

- условие стыковки по перемещениям (3.4)

- условие стыковки по усилиям (3.5)

*-* граничное условие в точке D (3.6)

Данные формулы (3), (3.1) –(3.6) представляют собой математическую формулировку краевой задачи.

,

*,*

*,*

Константы находим из условий (3.1) –(3.6)

Из (3.6): →

Из (3.5): →

Из (3.3): →

Из (3.1): →

Из (3.2): →

→

Из (3.4): →

→

Таким образом:

,

*,*

*,*

При условии, что , получим:

,

*,*

*,*

Следствие из закона Гука:

,

*,*

*,*

# **2. Построение эпюры перемещений и внутренних сил.**

Найдем значения перемещений и внутренних сил на границах участков.

,

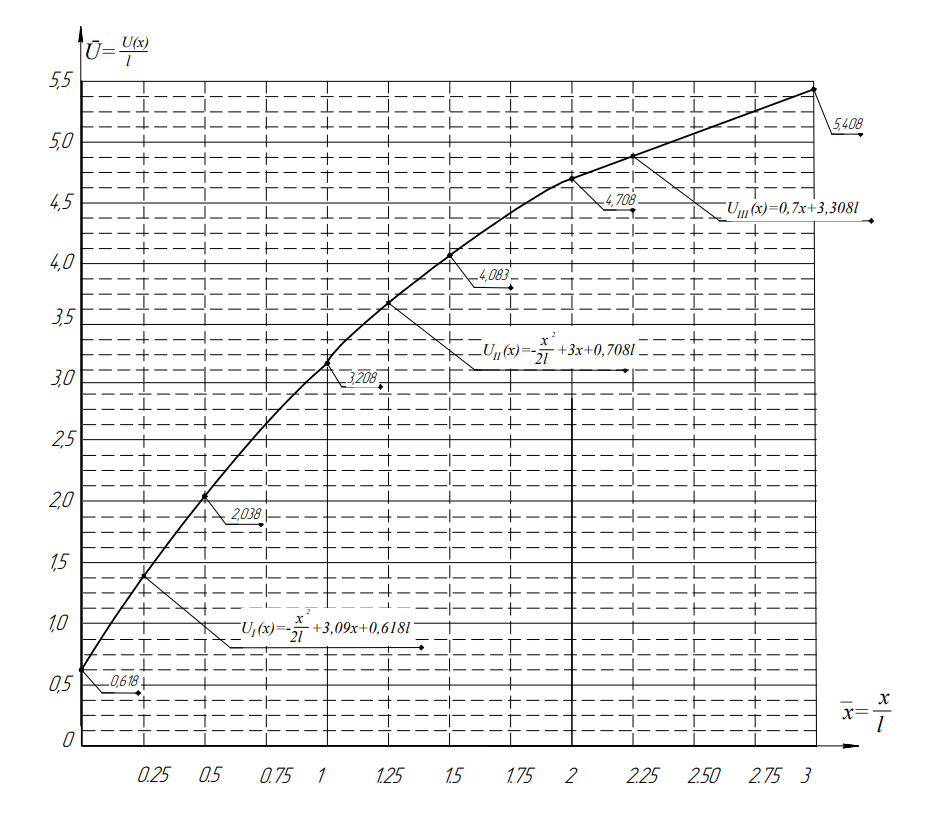
**

Рис.1. Эпюра перемещений.

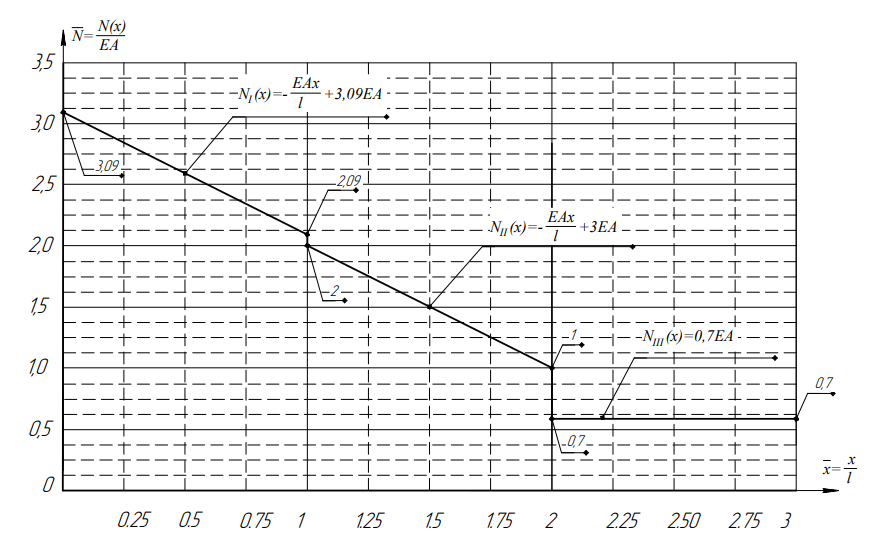
**

Рис.2. Эпюра внутренних сил.

# **3. Решение энергетическим методом**

**3.1 Составим алгоритм решения:**

1. Сформулировать краевую задачу;
2. Преобразовать ее в вариационную задачу;
3. Получить решения энергетическим методом на кусочно-линейной аппроксимации;
4. Дать оценку погрешности по энергетическому методу между точным и приближенным решениями.

**3.2 Решение:**

Преобразуем задачу в вариационную. Для этого запишем условия равенства нулю невязок дифференциальных уравнений краевой задачи.

Преобразуем первые три слагаемых по отдельности:

Подставим преобразования 1, 2, 3 в исходное уравнение (1\*), преобразуем его с учетом условий:

Применим граничные условия из формулировки краевой задачи.

Тогда:

Умножим обе части на (-1):

Преобразуем это выражение, вынося знак вариации за скобку с использованием правил варьирования:

Тогда функционал имеет вид:

Условия стационарности функционала:

Это есть формулировка слабого вариационного принципа Лагранжа, который гласит, что функционал полной потенциальной энергии принимает экстремальное значение (минимум) на точном решении краевой задачи.

Используем этот принцип, задавая решения в виде кусочно-линейных функций.

**Аппроксимация поля перемещений.**

**Первый участок:**

где , .

**Второй участок:**

Введем новую систему координат с началом в .

Тогда:

;

;

где .

**Третий участок:**

Новая система координат с началом в .

Тогда:

;

;

где .

С учетом этих введений функционал примет вид:

Определим :

Тогда

Определим из условия минимума функционала

Решение системы:

Из четвертого уравнения имеем:

Из третьего:

Из второго:

Из первого:

Подставляя исходные данные , получим:

Подставим найденное значение в

Из будем иметь:

Из :

Подставим полученные значения в приближенные решения:

Первый участок

Второй участок:

Третий участок:

Внутренние усилия:

Перепишем полученные уравнения в общей системе координат.

Так как дифференциалы от переменной одинаковы , то внутренние усилия остаются без изменений:

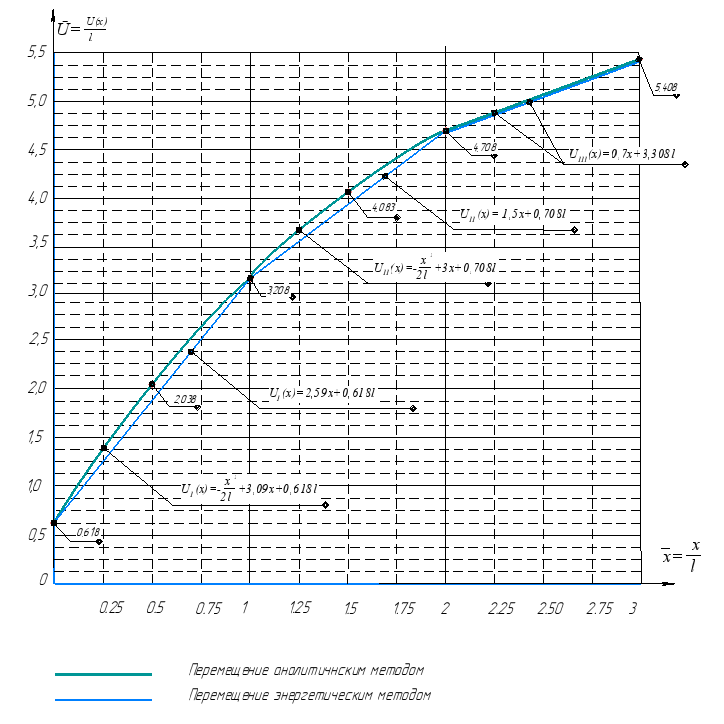
Приведем рисунки со сравнением графиков полученного приближенного решения и точного. Штриховыми линиями показаны результаты приближенного решения для наглядности сравнения.  


Рис. 3. Графики перемещений точного и приближенного методов.

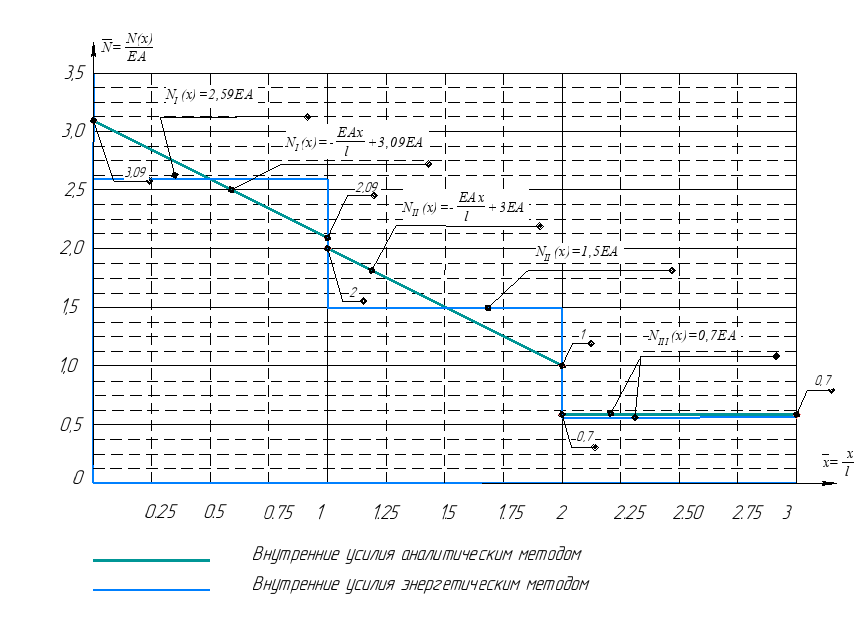


Рис. 4 График внутренний усилий.

Дадим оценку погрешности по энергетическому методу между точным и приближенным решениями.

Оценка точности решения по энергии.

Для оценки необходимо определить значения функционала на точном и приближенном решениях и затем посчитать относительную погрешность между этими значениями.

Найдем значение функционала на приближенном решении, полученной на кусочно-линейной аппроксимации.

Обозначим совокупность значений как .

Подставим и значения внешних нагрузок.

Определим значение функционала на точном решении, полученном в первой части ДЗ.

,

*,*

*,*

Обозначим эту совокупность решений как .

Тогда относительная погрешность равна:

Вывод: Оценка по энергии дала совпадение приближенного и точного решений краевой задачи. Кусочно-линейная аппроксимация поля перемещений позволяет получить точные значения перемещений в узлах стержня. Слабый вариационный принцип Лагранжа выполняется, так как значение функционала по модулю на точном решении больше, чем на приближенном.